Exercícios complementares

Cap.5 Integrais múltiplos

1. A parábola $2y = x^2$ e as rectas $y = 3x$ e $x + y = 4$ limitam duas regiões no 1º quadrante. Calcule $\int\int_D 1\, dA_{xy}$, em que D é uma dessas regiões (à sua escolha). O que representa este integral?

2. Inverta a ordem de integração e calcule o integral
$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x + 2y)\, dx\, dy.$

3. Troque a ordem de integração no seguinte integral
$$\int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\ dydx + \int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\ dydx$$
e calcule-o.

4. Inverta a ordem de integração e calcule o integral
$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} y\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{-x+2} y\, dy\, dx.$

5. Calcule o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 8y$, e pelo parabolóide $x^2 + y^2 = 4z$.

6. Calcule $\int\int_D \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}\, dA$, em que D é a intersecção da coroa circular
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2a,\ a > 0\}$ com o semiplano
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 0\}$.

7. Calcule a área do domínio plano no 1º quadrante, limitado pelas curvas $xy = 4,\ xy = 8,\ xy^3 = 5$ e $xy^3 = 15$, utilizando a mudança de variáveis $u = xy,\ v = xy^3$.

8. Calcule $\displaystyle\int\int_D xy\, dA_{xy}$, em que D é a região no 1º quadrante limitada pelas curvas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ e $x^2 + y^2 = 16$, utilizando a mudança de variáveis $u = x^2 - y^2,\ v = x^2 + y^2$.

9. Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $z = 4 - x^2$ e os planos $y = 6,\ y = 0$ e $z = 0$.

10. Seja G o sólido no 1º octante limitado pelos planos coordenados e pelo plano $ax + by + cz = d$ (em que $a, b, c, d > 0$). Formule (MAS <u>NÃO</u> CALCULE) um integral triplo iterado que permite calcular o volume de G.

11. a) Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta}\int_0^{r^2} r\,\cos\theta\, dz\, dr\, d\theta$ (em que $(r,\ \theta,\ z)$ são as coordenadas cilíndricas).

    b) Converta o integral da alínea b) para coordenadas cartesianas.

12. Calcule $\displaystyle\int\int\int_D z\, dV$, em que $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq z^2 \wedge z \geq 0\}$.